١٢



حكومەتی هەرێمی كوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەكان

بیركاری بۆ هەمووان

كتێبی ڕاهێنان

پۆلی دوازدەهەمی زانستی

چاپی شەشەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ كوردی / ١٤٣٦ ك

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

ناوەڕۆك

بەشی یەکەم	وێنە ڕوونکردنەوەییەکان و نموونە هێڵییەکان Graphs and Linear Models	1
بەشی دووەم	دەروازەیەك بۆ هەژمارکردنی جیاکاری و تەواوکاری Introduction to Calculus	4
بەشی سێیەم	داتاشراو و نموونەی لێکەوت Derivative and the Tangent Problem	9
بەشی چوارەم	جێبەجێکردنی داتاشراو Applications of Differentiation	13
بەشی پێنجەم	تەواوکاری بێسنوور Indefinite Integral	18
بەشی شەشەم	بڕگە قوچەکییەکان Conics Sections	22
بەشی حەفتەم	ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە Complex Numbers And Geometry	25

بۆ خوێندکار

کتێبی ڕاهێنان داڕێژراوە بۆ ئەوەی ڕاهێنانی زیادە بۆ خوێندکار پەیدا بکات، پەیوەستە بەو کارامەیینانەی لەهەر وانەیەکدا فێری بووە. ئەو کتێبە پێکهاتووە لە بەشێك بۆ هەر وانەیەك. و هەر ڕاهێنانێك لەو بەشانەی کارامەیی وجێبەجیکردنیان دەگرێتەوە، کە خوێندکار لەو وانەیەدا فێری بووە.

ناو ____________ بەروار ____________ پۆل ____________

ڕاهێـــنان

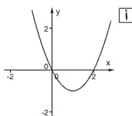
وانە **1-1**

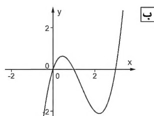
وێنە ڕوونکردنەوەییەکان Graphs

ئەو ڕوونکردنەوەییە دیاریکە کە بۆ نەخشەی ڕاهێنانەکە دەگەڕێتەوە.

1 $f(x) = (x-1)^2 - 1$

2 $f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 1$





ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بە خاڵ بکێشە.

3 $f(x) = 4 - x^2$

4 $f(x) = |x| - 1$

یەکتربڕینە ئاسۆییەکان و ستوونییەکانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

5 $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

6 $f(x) = \frac{3(2-\sqrt{x})}{x}$

دیاریکە ئەگەر نەخشەکە تاکە یان جووتە، یان هیچییان نییە؟

7 $f(x) = x^3 - 4x$

8 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x}$

9 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە:

10 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ و $g(x) = 1 - x^2$

11 $f(x) = -|2x-3| + 6$ و $g(x) = 6 - x$

ناو ________________ بەروار ________________ پۆل ________________

ڕاهێـــنان

وانە 2-1

نموونە هێڵییەکان Linear Models

وێنەی ڕاستەهێڵەکە بکێشە کە لاری و ئەو خاڵەی پێیاندا دەڕوات دراوە.

1 3 ؛ $(-2, 1)$

2 0 ؛ $(3, 5)$

3 پێناسە نەکراوە ؛ $(2, \frac{5}{4})$

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵە دیاریکراوەکەدا دەڕوات بدۆزەوە.

4 $(1, 2)$ و $(4, 3)$

5 $(-2, 4)$ و $(-2, -4)$

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە خاڵە دراوەکە دادەڕوات بە ڕاستەهێڵە دراوەکە تەریبە بدۆزەوە.

6 $(1, 2)$ ؛ $2x - 3y = 1$

7 $(-5, 3)$ ؛ $x = 1$

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە خاڵە دراوەکە دادەڕوات و لەسەر ڕاستەهێڵە دراوەکە ئەستوونە بدۆزەوە.

8 $(-2, 3)$ ؛ $4x - 5y = 3$

9 $(3, 1)$ ؛ $y = -2$

دووری نێوان خاڵی d و ڕاستەهێڵی M بدۆزەوە.

10 $M(4, 5)$ ؛ $d: 4x + 3y = 4$

11 $M(1, 3)$ ؛ $d: y = 2x - 1$

12 کۆمپانیایەك دوو دەرخستەی پێشکەش بە فەرمانبەرێکی نوێ کرد، بۆ ئەوەی یەکێکیان هەڵبژێرێت. لە دەرخستەی یەکەم 6500 دینار بەرامبەر هەر کاتژمێرێکی کار وەردەگرێت، لەگەڵ 500 دینار بۆ هەر یەکەیەکی بەرهەم. لە دەرخستەی دووەم 5100 دینار وەردەگرێت بەرامبەر هەر کاتژمێرێکی کار لەگەڵ 700 دینار بۆ هەر یەکەیەکی بەرهەم.

أ هاوکێشەیەکی هێڵی بۆ هەر دەرخستەیەك بنووسە، کە کرێیەکە بە کاتژمێر w بەپێی ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنراو لە کاتژمێرێك x بنوێنێت.

ب هەر دوو هاوکێشەکە لە هەمان ڕووتەختی پۆوتانەکان بنوێنە، و پۆوتانی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕوونکردنەوەکە بدۆزەوە.

ج خاڵی یەکتربڕینەکەی لقی ب چی دەنوێنێت؟

چۆن ئەم زانیارییانە بەکاردەهێنیت، بۆ ئەوەی دەرخستەی گونجاو بۆ فەرمانبەرەکە هەڵبژێرێت؟

ناو ________________ بەروار ________________ پۆل ________________

راهێنان

وانە **3-1**

نەخشەکان و ڕوونکردنەوەکانیان Functions and Their Graphs

بەهای داواکراوەکانی نەخشەکە ئەگەرکرا هەژمار بکە، ئەنجامەکان بە سادەترین شێوە بنووسە.

1 $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ، $f(1)$ ، $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ، $f(5)$ ، $f(1+h)$ کاتێك $h \ge -\frac{1}{2}$

2 $f(x)=x^3-2x^2$ ، $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f\left(\sqrt{2}\right)$ ، $\frac{f(2+\triangledown x)-f(2)}{\triangledown x}$

3 $f(x)=\sin 2x$ ، $f(0)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

4 $f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} & x \ge 1 \\ \frac{3}{x-1} & x < 1 \end{cases}$ ، $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(-1)$

بوارو مەودای هەر نەخشەیەك دیاریکە.

5 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

6 $f(x)=\frac{2}{|x-1|}$

7 بەهای $(f \circ g)(2)$ بدۆزەوە کاتێك $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{x-3}$.

8 ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی $f(x)=|x|$ بۆ وێنەکێشانی ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانە بەکاربهێنە.

أ $y=|x|+1$ ب $y=|x+1|$ ج $y=|2x-4|$

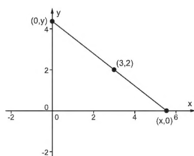
9 سێ نەخشەی وەك f، g، h بدۆزەوە بۆ ئەوەی نەخشەی $k=f \circ g \circ h$ نەخشەی $k(x)=2\sin(3x)$ پێکبهێنێت.

10 دیاریکە ئەگەر نەخشەی f جووتە یان تاکە.

أ $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ ب $f(x)=x^2\sin x$ ج $f(x)=x+|x|$

11 ئەو جێگۆڕکێ یەك لە دواییەکانە دیاریبکە کە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=x^3$ بۆ ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك دەگۆڕێت

أ $f(x)=(x-1)^3+1$ ب $f(x)=2x^3$ ج $f(x)=2(x+1)^3$



12 وێنە بەرامبەر سێگۆشەیەکی وەستاو لە چارێکی یەکەم لە ڕووتەختی پۆوتانەکان کە لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەکان و ڕاستەهێڵێك بە خاڵی $(3, 2)$دا دەڕوات پێکدێت ڕووندەکاتەوە، درێژی ژێی سێگۆشەکە وەك نەخشەیەك بەپێی x بنووسە.

13 ڕوونبیکەوە ئەنجامی لێکدانی دوو نەخشەی تاك، نەخشەیەکی جووتە؟

14 ئەنجامی لێکدانی نەخشەیەکی تاك و نەخشەکی جووت، بریتییە لە نەخشەیەکی تاك.

ناو ________________ بەروار ________________ پۆل ________________

راهێـــنان

وانە **1-2**

دەروازەیەك بۆ هەژماركردنی جیاكاری و تەواوكاری Introduction to calculus

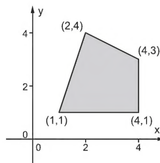
لە راهێنانی 1 و 3 دا، ئەگەر كرا شیكاری راهێنانەكە بكە، بێ پەنابردن بۆ چەمكی ئامانج و شیكاركردنی و بۆچوونی خۆت روونبكەوە ئەگەر پەنات بۆ چەمكی ئامانج برد، پاشان رێگای ژمارەیی یا روونكردنەوەیی بۆ خەملاندنی وەڵامەكەت بەكاربهێنە.

1 ئەو دوورییەی تەنە جووڵاوەكە لە ماوەی 20 چركەدا دەیبرێت بدۆزەوە، ئەگەر تەنەكە بە خێراییەكی نەگۆڕ برەكەی 8m/s بجووڵێت.

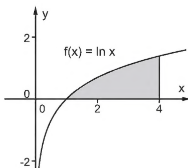
2 خاڵێك لەسەر روونكردنەوەی نەخشەی $f(x) = 0.2x^2 + x$ دەجووڵێت، كاتێك x بەرەوپێشچوونی ئاسۆیی خاڵەكە بێت و $f(x)$ بەرزبوونەوەی بەرامبەر دەنوێنێت. تێكڕای گۆڕانی بەرزی خاڵەكە لە $x = 3$ بدۆزەوە.

لە راهێنانی 3 و 4 دا، رووبەری ناوچە سێبەركراوەكە بەبەكارهێنانی لاكێشەكان بدۆزەوە.

3



4



5 نەخشەی $f(x) = x^2 - 2x$ و خاڵی $P(1, -1)$ كە دەكەوێتە سەر روونكردنەوەكەی بەكاربهێنە.

[أ] وێنەی روونكردنەوەی نەخشەكە و ئەو برِانەی بە خاڵی P و خاڵەكانی $(x, f(x))$ دا دەڕوات بكێشە كاتێك x ئەم بەهایانە وەردەگرێت 2 ، 1.8، 1.5، 1.2.

[ب] لاری هەریەك لەو برِانە بدۆزەوە.

[ج] ئەنجامەكانی لقی ب بۆ خەملاندنی لاری لێكەوتی نەخشەی f لە خاڵی P بەكاربهێنە. ئینجا باسیبكە چۆن لاری برِەكە لە لاری لێكەوتەكە نزیك و نزیكتر دەكەیەوە.

6 نەخشەی $f(x) = \sqrt{x}$ و خاڵی $P(4, 2)$ كە دەكەوێتە سەر روونكردنەوەكەی بەكاربهێنە.

[أ] وێنەی نەخشەكە و ئەو برِانەی بە خاڵی P و خاڵەكانی $(x, f(x))$ دا دەڕوات بكێشە كاتێك x ئەم بەهایانە وەردەگرێت 1، 3، 5.

[ب] لاری هەریەك لەو برِانە بدۆزەوە، ئینجا بەهای نزیكەیی لاری لێكەوتی روونكردنەوەی نەخشەكە لە خاڵی Pدا بدۆزەوە.

ناو ________________ بەروار ________________ پۆل ________________

ڕاهێـــــنان

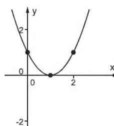
وانە **2-2**

دۆزینەوەی ئامانجەکان بە ڕوونکردنەوەیی و ژمارەیی

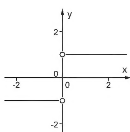
Finding Limits Graphically and Numerically

ئامانج بە ڕوونکردنەوەیی (ئەگەر هەبێت) بدۆزەوە، ئەگەرنا بەڵگە بۆ نەبوونی ئامانجەکە بهێنەوە.

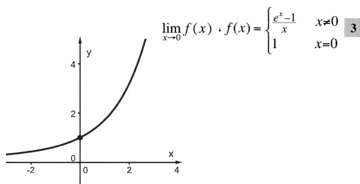
1 $\lim_{x\to 2}(x-1)^2$



2 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

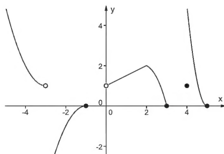


3 $\lim_{x\to 0} f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$



4 بە ژمارەیی ئامانجی $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ بدۆزەوە

5 وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە بۆ بڕیاردان لە هەبوونی بەهایەك، ئەگەر بەهایەکە زانراوبێت بەهایەکی نزیکەیی بۆی دیاربکە، ئەگەرنا بەڵگە بهێنە بە نەبوونی ئامانجەکان.



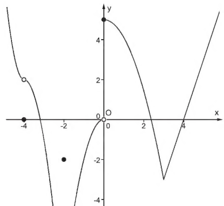
أ $f(-2)$ ب $\lim_{x\to -2} f(x)$

ج $f(-3)$ د $\lim_{x\to -3} f(x)$

هـ $f(2)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$

ز $f(4)$ ح $\lim_{x\to 4} f(x)$

6 ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بەکاربهێنە و بەهاکانی c دیاریبکە، لەکاتی نەبوونی $\lim_{x\to C} f(x)$



7 ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بکێشە کە مەرجەکانی خوارەوە جێبەجێ دەکات.

- $f(0)$ نییە.
- $\lim_{x\to 0} f(x)=6$
- $f(2)=6$
- $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــنان

وانە **3-2**

دۆزینەوەی ئامانجەکان Finding Limits

لە ڕاهێنانی 1–7 ، ئامانجی داواکراو بدۆزەوە:

1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

2 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

3 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{4x}$

5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$

7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x+1|-|x-1|}{x}$ بدۆزەوە.

لە ڕاهێنانی 8 و 9 دا، سەلمێنراوی دوو مەرج بۆ دۆزینەوەی $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ بەکاربهێنە.

8 $3+2x-x^2 \le f(x) \le 3+2x+x^2$ ، $c=0$

9 $x-|x-1| \le f(x) \le x+|x-1|$ ، $c=1$

10 نەخشەی f و g بدۆزەوە کە ئەمانە پاسادان دەکەن: ئەم دوو ئامانجە $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ نەبێت، بەڵام $\lim\limits_{x\to 0}[f(x).\ g(x)]$ هەبێت.

11 نەخشەی $s(t)=-4.9t^2+200$ لادانی بەردێك لە بەرزی 200m پاش t چرکە لە کەوتنی دەنوێنێت.
ئامانجی $\lim\limits_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}$ بریتییە لە خێرایی تەنەکە لە $t=a$.

أ خێرایی بەردەکە لە $t=2$ بدۆزەوە.

ب خێرایی بەردەکە لەکاتی بەرکەوتنی بە زەوی دەبێتە چەند؟

12 أ ڕوونیبکەوە کە $-|a|\le a\le |a|$ ژمارەی ڕاستی a هەرچەندبێت.

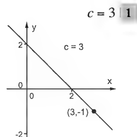
ب ڕوونیبکەوە، ئەگەر $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0$ ئەوا $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$.

ڕاهێـــــنان

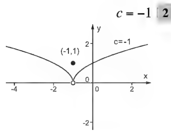
وانە **4-2** نەخشەی بەردەوام Continuous Function

لە ڕاهێنانی 1 تا 3 ، وێنە ڕوونکردنەوەکە بەکاربهێنە، بۆ دیاریکردنی ئامانجی نەخشەکە کاتێك x لەلای ڕاست و لەلای چەپی c نزیکدەبێتەوە.$\lim_{x\to c} f(x)$(ئەگەر هەبێت) بدۆزەوە پاشان بەردەوامی نەخشەکە لە $x=c$ تاوتوێبکە.

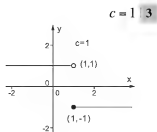
1 $c=3$



2 $c=-1$



3 $c=1$



لە ڕاهێنانی 4 تا 6، بەردەوامی نەخشەکە تاوتوێبکە.

4 $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ **5** $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ **6** $f(x)=\frac{|x+1|-|x|}{x}$

لە ڕاهێنانی 7 و 8 دا، بەهای x (ئەگەر هەبێت) کە نەخشەکە تیایدا پچڕاوە بدۆزەوە و دیاریکە ئەگەر پچڕانەکەی لابردنی لە توانادایە.

7 $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$ **8** $f(x)=\frac{e^x-2}{x-1}$

9 بەهای a و b دیاریبکە بۆ ئەوەی نەخشەکە خاڵی پچڕانی نەبێت.

$$f(x)=\begin{cases} 3 & x\le 1 \\ ax+3 & 1<x\le 4 \\ bx+1 & x>4 \end{cases}$$

10 بۆچی نەخشەکە لە نێوان a و b دا ڕەگی هەیە؟

$b=1$ ، $a=0$ ، $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$

11 **قسەکردنەکان**: تێچوونی قسەکردن لە نێوان هەولێر و دەرەوە بەم شێوەیە هەژماردەکرێت: 1040 دینار بۆ دوو خولەکی یەکەم، 360 دینار بۆ هەر خولەکێك یان بەشێك لە خولەکی زیادە، نەخشەی تەواوی$[x]$ ($[x]$ گەورەترین ژمارەی تەواو لە x زیاتر نییە) بەکاربهێنە بۆ نووسینی تێچوونی قسەکردن بەپێی کاتەکەی t بە خولەکەکان. ڕوونکردنەوەی ئەم نەخشە بکێشە و بەردەوامییەکەی تاوتوێبکە.

ڕاهێـــنـان

وانە 5-2

ئامانجە بێسنوورنەدراوەکان Infinite Limits

دەرکەنارە ستوونییەکان (ئەگەر هەبێت) بۆ ڕوونکردنەوەیی نەخشەکان بدۆزەوە:

1 $f(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$

2 $f(x)=\frac{2+x}{x^2(1-x)}$

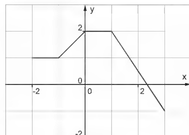
3 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

ئەگەر نەخشەکە دەرکەناری ستوونی هەیە، یان پچڕانێك لابردنی لە تواناد هەیە دیاربکە، لە $x=-1$.

4 $f(x)=\frac{x^2-6x-7}{x+1}$

5 $f(x)=\frac{\sin(x+1)}{x+1}$

6 ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بەرامبەر بۆ نووسینی هاوکێشەی نەخشەی $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ لەماوەی $[-2, 3]$ بەکاربهێنە.



ناو ______ بەروار ______ پۆل ______

راهێــــنان

وانە 1-3 داتاشراو و نموونەی لێکەوت

Derivative and Tangent Problem

لاری نەخشەکە لە خاڵی دیاریکراو بدۆزەوە.

1 $f(x)=x^2-2x+3$ ، $(1, 2)$

2 $f(x)=\frac{2x}{2+x}$ ، $(1, \frac{2}{3})$

3 $f(x)=x^3+1$ ، $(0, 1)$

داتاشراوی هەر نەخشەیەك بەبەکارهێنانی ئامانجەکان بدۆزەوە.

4 $f(x)=x^2+x$

5 $f(x)=\sin x$

6 $f(x)=\sqrt{2x+3}$

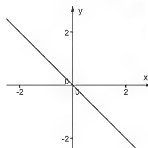
هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە کە تەریبە بەو ڕاستەهێڵەی هاوکێشەکەی دیاریکراوە، بدۆزەوە.

7 $f(x)=x^2-2x+2$ ، $2x-y+2=0$

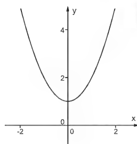
8 $f(x)=\sqrt{x+1}$ ، $x-4y+5=0$

ئەگەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی f ـت هەبێت. ئەوا ڕوونکردنەوەی داتاشراوەکەی بکێشە.

9



10



11 لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەی h لە خاڵی $(3, 1)$ دا بە خاڵی $(1, 3)$ دەڕوات. $h(3)$ ، $h'(3)$ بدۆزەوە.

12 بەهایەکانی x بدۆزەوە کە نەخشەی $f(x)=\begin{cases} x^2+3x & x<0 \\ 2x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ توانای داتاشراوی نەبێت.

دیاریبکە ئەگەر نەخشەکە لە $x=1$ توانای داتاشراوی هەبێت

13 $f(x)=|x-1|$

14 $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & x\leq 1 \\ (x-1)^2 & x>1 \end{cases}$

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــــنان

وانە **2-3** ڕێساکانی داتاشراو Differentiation Rules

داتاشراوی نەخشەکە بدۆزەوە

1 $f(x) = x^2 + 4 - \frac{5}{x^2}$ **2** $f(x) = x^2 \sin x$ **3** $f(x) = x^2 + xe^x$

4 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ **5** $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$ **6** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

7 $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ **8** $f(x) = \tan\sqrt{x}$

هاوکێشەی لێکەوتی نەخشەکە لە خاڵی دیاریکراو بدۆزەوە.

9 $f(x) = x\sqrt{x+1}$ ، $(3, 6)$

10 $f(x) = x^2 e^x + 1$ ، $(0, 1)$

بۆ دیاریکردنی بەهای $f'(1)$ پێدراوەکان بەکاربهێنە.

$g(1) = 1$ و $g'(1) = -1$ ، $h(1) = -2$ و $h'(1) = 3$

11 $f(x) = 3g(x) - 2h(x)$ **12** $f(x) = g(x^2) \times h(x)$

13 $f(x) = h(g(x))$ پێدراوەکان بۆ دیاریکردنی بەهای $f'(0)$ بەکاربهێنە: $g(0) = 1$ و $g'(0) = -2$ و $h'(1) = 5$

14 بەهای C و K دیاریبکە بۆ ئەوەی نەخشەی $f(x) = x^3 + kx^2 + c$ لێکەوتی ئاسۆیی لە خاڵی $(1, 2)$دا هەبێت.

15 خێرایی: بیسەلمێنە کە ناوەندە خێرایی تەنێکی جوڵاو لە ماوەی $[t_0 - 4, t_0 + 4]$ دەکاتە خێرایی ساتی لە $t = t_0$ ، ئەگەر زانیت نەخشەی لادان بریتییە لە $s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + c$

16 هاوکێشەی برگە هاوتای $f(x) = ax^2 + bx + c$ بدۆزەوە کە بە خاڵی $(1, 0)$ دا دەڕوات و ڕاستەهێڵی $y = x - 1$ لە خاڵی $(1, 0)$ دەبێتە لێکەوتی.

ناو ______ بەروار ______ پۆل ______

ڕاهێـــنان

وانە 3-3

داتاشراوی خۆبەخۆ و داتاشراوە بەرزەکان

Implicit Defferentiation and Higher Derivative

y' بدۆزەوە.

1 $x^3 y + xy^2 = 2$

2 $x = y + \sin y$

3 $x^2 + \ln y = e^y$

y' و لاری چەماوەکە لە خاڵی دیاریکراو بدۆزەوە.

4 $(1, 1) : 2x^2 + 5y^2 = 7$

5 $(-1, 2) : xy + x^2 + y^2 = 3$

داتاشراوی دووەمی نەخشەکە بدۆزەوە.

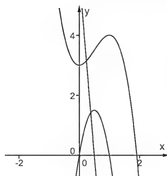
6 $f(x) = x + \sqrt{x+1}$

7 $f(x) = e^x + \ln^2 x$

داتاشراوی داواکرا بۆ ئەو نەخشەی یەکێك لە داتاشراوەکانی دراوە بدۆزەوە.

8 $f''(x) = x\sin x$ ، $f^{(4)}(x)$ بدۆزەوە.

9 $f'''(x) = x^2 + e^x$ ، $f^{(6)}(x)$ بدۆزەوە.



10 وێنەی بەرامبەر، ڕوونکردنەوەی نەخشەی f و ڕوونکردنەوەی نەخشەی f' و f'' دەنوێنێت، دیاریبکە کام لەم سێ ڕوونکردنەوانە، ڕوونکردنەوەی نەخشەکەیە، کامیان ڕوونکردنەوەی f' و کامیان هی f'' دەنوێنێت، باسی چوونیەتی دیاریکردنی هەرسێ ڕوونکردنەوەکە بکە.

11 بە دووبارە نووسینەوەی نەخشەکە ئامانجی داواکراو بدۆزەوە، پاشان ئامانجەکە بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی لوبیتال بدۆزەوە.

أ $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$

ب $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

ج $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}$

12 خاڵێك یان زیاتر دیاریبکە کە تێیدا لێکەوتی ڕوونکردنەوەی پەیوەندی $y^4 = y^2 - x^2$ ئاسۆیی بێت.

13 هەموو خاڵەکانی سەر بازنەی $x^2 + y^2 = 25$ بدۆزەوە کاتێك لاری لێکەوت یەکسانە بە $\frac{3}{4}$.

14 ئەو خاڵانە بدۆزەوە کە تێیدا لاری ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ ئاسۆیی بێت.

ناو ______ بەروار ______ پۆل ______

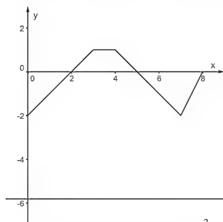
ڕاهێـــنان

وانە **4-3**

تێكڕای گۆڕانەكان Rates of change

1 درێژی لاكێشەیەك $(3t+2)$ و پانییەكەی $(\sqrt{t+1})$ یەكە پێوانە بێت، تێكڕای گۆڕانی ڕووبەری ئەو لاكێشەیە بە گۆڕانی t بدۆزەوە.

2 لوولەكێكی بازنەیی وەستاو نیوەتیرەی بنكەكەی $(\sqrt{t+2})$ و بەرزییەكەی $(\sqrt{2t+1})$ بێت تێكڕای گۆڕانی قەبارەی ئەو لوولەكە بە گۆڕانی t بدۆزەوە.



3 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونكردنەوەی نەخشەی $v=f(t)$ دەردەكەوێت، كە خێرایی ئاراستەكراوی خاڵێكی تەوەری x دەنوێنێت.

أ كەی خاڵەكە بۆ دواوە دەجوولێت؟ كەمی خاڵەكە بۆ پێشەوە دەجوولێت؟ كەی خێراییەكەی زیاد دەكات؟ و كەی كەم دەكات؟

ب كەی تاودانی خاڵێك موجەب یا سالب یا سفر دەبێت؟

ج كەی خاڵێك بە ئەوپەڕی خێراییەكەی دەجوولێت؟

د كەی خاڵەكە لە جوولە دەوەستێت؟

4 بەردێك لەسەر ڕووی مانگ بۆ سەرەوە هەڵدرا بە خێرایی بنەڕەتی 32m/s نەخشەی $s(t)=32t-0.8t^2$ نموونەیەك بۆ دۆزینەوەی بەرزی بەردەكە پاش t چركە دەنوێنێت.

أ خێرایی بەردەكە وەك نەخشەیەك بەپێی كات t بدۆزەوە، هەروەها تاودانەكەی وەك نەخشەیەك بەپێی كات t بدۆزەوە.

ب پاش چەند چركە بەردەكە دەگاتە ئەوپەڕی بەرزییەكەی؟

ج ئەوپەڕی بەرزییەكەی دەكاتە چەند؟

د كەی بەردەكە دەگاتە بەرزییەك نیوەی ئەوپەڕی بەرزییەكەی بێت؟

هـ چەند چركە بەردەكە لە بۆشایی (ئاسمان) دەمێنێتەوە؟

لە ڕاهێنانی 5 و 6 دا، وادابنێ x و y دوو نەخشەن بەپێی t و توانای داتاشراویان هەیە، داواكراوەكە بەپێی پێدراوەكە بدۆزەوە.

	پەیوەندی نێوان x و y	داواكراو	پێدراو
5	$xy=4$	$\frac{dy}{dt}$ لە $x=8$ $\frac{dx}{dt}$ لە $x=1$	$\frac{dx}{dt}=10$ $\frac{dy}{dt}=-6$
6	$2x^2+3y^2=5$	$\frac{dy}{dt}$ لە $x=1$, $y=1$	$\frac{dx}{dt}=-2$

7 نیوەتیرەی بازنەیەك 3cm/s زیاد دەكات.

أ تێكڕای گۆڕانی چێوەی بازنەكە كاتێك $r=9\text{cm}$ بدۆزەوە.

ب تێكڕای گۆڕانی ڕووبەری بازنەكە كاتێك $r=6\text{cm}$ بدۆزەوە.

8 تێكڕای گۆڕانی دووری نێوان خاڵێك لەسەر ڕوونكردنەوەی نەخشەی $y=x+\cos^2 x$ دەجوولێت و خاڵی بنەڕەت بدۆزەوە ئەگەر زانیت $\frac{dx}{dt}=2\text{cm/s}$.

ناو ____________ بەروار ____________ پۆل ____________

ڕاهێـــنان

وانە **1-4** تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم First Derivative Test

لە ڕاهێنانی 1 تا 4، ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و ڕوو لە کەمبوون دیاریبکە.

1 $f(x)=4x+\frac{1}{x}$

2 $f(x)=x^3-12x+1$

3 $f(x)=xe^x$

4 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

لە ڕاهێنانی 5 تا 8 ئەمانە بدۆزەوە: (أ) بەها شلۆقەکان (ب) ماوەکانی ڕوو لەزیادبوون و کەمبوون (ج) تاقیکردنەوەی داتاشراوی یەکەم بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهایەکانی ئەوپەڕی خۆجێیەتی (د) ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بۆ پاسەدانکردنی ڕاستی وەڵامەکەت بکێشە.

5 $f(x)=x^2+4x$

6 $f(x)=2x^3-3x^2-1$

7 $f(x)=-4x+\frac{4}{x}$

8 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

لە ڕاهێنانی 9 تا 12، هەمان داواکارییەکانی پرسیارەکانی پێشوو لە ماوەی $[0, 2\pi]$ جێبەجێبکە.

9 $f(x)=\frac{x}{2}-\sin x$

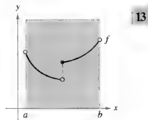
10 $f(x)=\sin 2x$

11 $f(x)=x^2+\cos x$

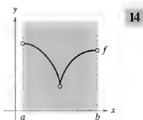
12 $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

لە ڕاهێنانی 13 تا 16، دیاریبکە ئەگەر نەخشەکە بەهای بچووکترین خۆجێی لە ماوەی $]a, b[$ هەیە بەپێی ڕوونکردنەوەکەی لەو ماوەیەدا.

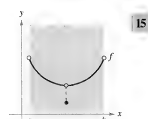
13



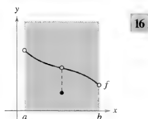
14



15



16



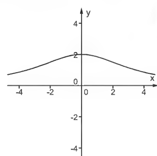
ناو ______ بەروار ______ پۆل ______

ڕاهێـــنان

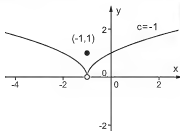
وانە **2-4** تاقیکردنەوەی داتاشراوی دووەم Second Derivative Test

لە ڕاهێنانی 1 و 2 دا، ماوە کراوەکان بدۆزەوە کاتێك ڕوونکردنەوەی نەخشەکە قۆقز یا قۆپاو بێت.

1



2



لە ڕاهێنانی 3 تا 6، خاڵەکانی وەرگەڕان (ئەگەر هەبێت)، بدۆزەوە، ناوچەکانی قۆقز و قۆپاوی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بدۆزەوە.

3 $f(x) = 2x^4 - 8x + 3$

4 $f(x) = x\sqrt{x+1}$

5 $f(x) = x - \cos x$ لەماوەی $[0, 2\pi]$

6 $f(x) = xe^x$

لە ڕاهێنانی 7 تا 10، .بەهای ئەوپەڕی (گەورەترین و بچووکترین) کۆتایی خۆجێیەتی بدۆزەوە بە بەکارهێنانی داتاشراوی دووەم ئەگەر کرا.

7 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

8 $f(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)^2$

9 $f(x) = x\ln x$

10 $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ لە ماوەی $[0, 2\pi]$

لە ڕاهێنانی 11 و 12، وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە کە پاسەدانی مەرجە دیاریکراوەکان دەکات

11
$f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) > 0$ لەماوەی $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) < 0$ لەماوەی $x > 1$
$f''(x) < 0$

12
$f(0) = f(2) = 0$
$f'(x) < 0$ لەماوەی $x < 1$
$f'(1) = 0$
$f'(x) > 0$ لەماوەی $x > 1$
$f''(x) > 0$

13 نەخشەی $C(x) = 2x + \frac{320\,000}{x}$ نموونەیەك بۆ هەژمارکردنی تێچوونی کڕین و داکردنی x یەکە لە بەرهەمێکی دیاریکراو پێکدەهێنێت چەند یەکە لە x پێویستە بکڕدرێت و دابکرێت بۆ ئەوەی تێچوون کەمترین بێت.

14 نەخشەی $S = \frac{100\,t^2}{65+t^2}$ کاتێك $t > 0$ نموونەیەك پێکدەهێنێت بۆ دیاریکردنی خێرایی چاپکەرێك لەسەر ئامێری چاپ (بە ژمارەی وشەکان لە خولەکێك) بەپێی ژمارەی هەفتەکان t پاش ڕاهێنانکردنی.

أ نیشانەی داتاشراوی یەکەم چییە کاتێك t موجەب بێت؟

ب ئایا خێرایی کەسەکە بە بەردەوامی زیاد دەکات کاتێك بەهای t زیادبێت؟ ڕوونیبکەوە.

ناو ________________ بەروار ________________ پۆل ________________

ڕاهێـــنان

وانە **3-4** ئامانج لە بێپایان

Limits at infinity

لە ڕاهێنانی 1 تا 6، ئامانجی داواکراو بدۆزەوە.

1 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{2x-3}$

2 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+5}$

4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x+2\cos x}$

5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin 5x}{x}$

6 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{x+1}$

لە ڕاهێنانی 7 تا 12، ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە بەبەکارهێنانی بەهای ئەوپەڕی خۆجێیتی و یەکتر برینەکان لەگەڵ دوو تەوەری پۆوتانەکان و هاوجێبوون و دەرکەنارەکان،

7 $f(x)=\frac{3+x}{2-x}$

8 $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

9 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-16}$

10 $f(x)=1-\frac{4}{x^2}$

11 $f(x)=4x+\frac{1}{x}$

12 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

13 ڕاستەهێڵێك لارییەکەی m بێت و بە خاڵی $(-2\ ,\ 0)$دا دەڕوات.

أ بەپێی m دووری $d(m)$ لە نێوان خاڵی $(4\ ,\ 2)$ و ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەوە.

ب $\lim_{x\to+\infty} d(m)$ و $\lim_{x\to-\infty} d(m)$ بدۆزەوە.

ناو ________ بەروار ________ پۆل ________

ڕاهێــــنان

وانە 4-4

کێشانی ڕوونکردنەوەی نەخشەکان Curve Sketching

لە ڕاهێنانی 1 تا 6، وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

1 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

2 $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$

3 $f(x)=(x-1)^5$

4 $f(x)=x\sqrt{16-x^2}$

5 $f(x)=|2x-5|$

6 $f(x)=x^5-5x$

لە ڕاهێنانی 7 تا 9، وێنەی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشە.

7 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ لە ماوەی $[0\,,\,2\pi]$

8 $f(x)=2x-\tan x$ لە ماوەی $]-\frac{\pi}{2}\,,\,+\frac{\pi}{2}[$

9 $f(x)=\frac{x}{\tan x}$ لە ماوەی $]0\,,\,\frac{\pi}{2}[$

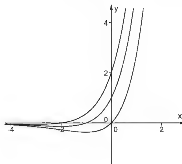
لە ڕاهێنانی 10 تا 12، نەخشەیەك بدۆزەوە، پاسادانی مەرجەکانی پرسیارەکە بکات.

10 نەخشەکە هێڵێکی دەرکەناری ستوونی $x=1$ و دەرکەناری ئاسۆیی $y=3$ هەیە.

11 نەخشەکە هێڵێکی دەرکەناری ستوونی $x=-2$ و دەرکەناری لاری $y=-x+1$ هەیە.

12 نەخشەکە هێڵێکی دەرکەناری ستوونی $x=1$ و دەرکەناری لاری $y=2x+3$ هەیە.

13 لە وێنەکە ڕوونکردنەوەکانی نەخشەی f و داتاشراوەکەی یەکەم f' و دووەم f'' دەردەکەوێت.
ڕوونکردنەوەکانی نەخشەی f و f' و f'' جیابکەوە.



14 $f(x)=\frac{1}{2}(ax)^2-ax$ کاتێك $a\neq 0$

أ لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکان، ڕوونکردنەوەکانی نەخشەکە بۆ چوار بەهای جیاوازی a بکێشە.

ب دیاریبکە، ئەگەر گۆڕانی بەهای a، یەکتربڕینەکانی ڕوونکردنەوەکەو بەهای ئەوپەڕی قۆپاوی یان قۆقزی نەخشەکە دەگۆڕێت.

ڕاهێـــنان

وانە 5-4

گەڕان بەدوای بەهاكانی ئەوپەڕی Optimization

1 دوو ژمارە بدۆزەوە، سەرجەمیان 120 بێت و ئەنجامی لێكدانیان گەورەترین بێت.

2 دوو ژمارەی موجەب بدۆزەوە، یەكێكیان هەڵگەڕاوەی ئەوی تریان بێت و سەرجەمیان بچووكترین بێت.

3 دوو ژمارەی موجەب بدۆزەوە، سەرجەمی دووجای هەردووكیان دەكاتە 72، ئەنجامی لێكدانیان گەورەترین بێت.

4 درێژی و پانی لاكێشەیەك بدۆزەوە بۆ ئەوەی ڕووبەرەكەی گەورەترین بێت، ئەگەر زانیت چێوەكەی $120m$ـە.

لە ڕاهێنانی 5 و 6 دا، خاڵێكی ڕوونكردنەوەی نەخشە دراوەكە بدۆزەوە كە نزیكترین خاڵ بێت لە خاڵە دراوەكە.

5 $f(x) = x^2$ ؛ $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

6 $f(x) = \sqrt{x+8}$ ؛ $(2, 0)$

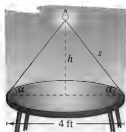
7 **بچووكترین ڕووبەر**: سەرجەمی چێوەی سێگۆشەیەكی ڕێك (لایەكسان) و چوارگۆشەیەك $10m$، درێژی هەریەك لەلایەكی سێگۆشەكەو لایەكی چوارگۆشەكە بدۆزەوە بۆ ئەوەی سەرجەمی دوو ڕووبەرەكە بچووكترین بێت.

8 **گەورەترین ڕووبەر**: درێژی و پانی گەورەترین لاكێشە بدۆزەوە، كە دەتوانرێت لە ناو نیو بازنەدا بكێشرێت، نیوەتیرەكەی r بێت.

9 تەلێكی كانزایی درێژییەكەی $30\ m$ و دەتەوێت دوو وێنەی (شێوەی)پێ دروست بكەیت، پێویستە چەند لەو تەلە بۆ هەر وێنەیەك بەكاربهێنیت ئەگەر زانیت ڕووبەری گشتی دەوردراو گەورەترین بێت.
باسی ئەم بارانەی خوارەوە بكە كاتێك دوو وێنەكە:

أ سێگۆشەیەكی ڕێك و چوارگۆشە بێت.

ب چوارگۆشە و بازنە بێت.



10 ڕۆشنایی، گڵۆپێك دەكەوێتە سەر مێزێكی بازنەیی كە نیوەتیرەكەی 4 پێیە. تیشكی I كە لە ڕووناكییەوە دەردەچێت بە یاسای $I = \frac{k \sin\alpha}{s^2}$ درێژ دەبێتەوە كاتێك k بەهایەكەی نەگۆڕەو s درێژی تیشكەكەیە لەسەرچاوەی ڕووناكییەكە بۆ لایەكی مێزەكە، و α ئەو گۆشەیە كە تیشكەكە لەگەڵ ئاستی مێزەكە پێكدەهێنێت. بەهای h بدۆزەوە كە وادەكات تیشكەكە گەورەترین بێت.

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــنان

وانە **1-5**

تەواوکاری بێسنوور Indefinite Integral

لە ڕاهێنانی 1 و 2 دا، بەبەکارهێنانی داتاشراو لە ڕاستی تەواوکارییەکە دڵنیا بە.

1 $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c$

2 $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

3 نەخشەی $f(x)$ بدۆزەوە ئەگەر زانیت $f'(x) = 2 - 3x^2$ و ڕوونکردنەوەی نەخشەی f بە خاڵی $(-1, 3)$ دا دەڕوات.

لە ڕاهێنانی 4 تا 10، تەواوکاری بێسنوور بدۆزەوە:

4 $\int (2x^3 - 3\sin x)dx$

5 $\int (2\sqrt{x} - 1)^2\,dx$

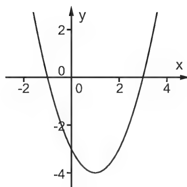
6 $\int \frac{2-3\cos x}{4}\,dx$

7 $\int \frac{dx}{3x\sqrt{x}}$

8 $\int \frac{4x^4 - 1}{x^2}\,dx$

9 $\int (x-2)(x+2)(x^2+4)dx$

10 $\int \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x}}\,dx$



11 لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی داتاشراوی نەخشەی f دەردەکەوێت، وێنەکە بەکاربهێنە بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارانەی خوارەوە کاتێک $f(1) = 0$.

أ لاری نەخشەی f لە خاڵی $x = 0$ بدۆزەوە.

ب هاوکێشەی لێکەوتی ڕوونکردنەوەی نەخشەی f لە $x = 1$ بدۆزەوە.

ج بەراورد لە نێوان $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ بکە.

د ئەگەر $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ هاوکێشەی f' بێت ئەوا $f(x)$ بە پێی x بدۆزەوە.

12 ئۆتۆمبێلێك بە تاودانێکی نەگۆڕ بڕەکەی $3\,m/s^2$ بۆ بڕینی دووری $150\,m$ بە ڕێکەوت.

أ ئۆتۆمبێلەکە بۆ بڕینی ئەو دوورییە چەند کاتی پێویستە؟

ب خێراییەکەی لەکاتی گەیشتن دەبێتە چەند؟

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــنان

وانە **2-5**

تەواوکاری سنووردار Definite Integral

لە ڕاهێنانی 1 تا 4، هەژماری تەواوکارییە سنووردارەکە بکە.

1 $\int_0^1 (x-2)(x+1)dx$ **2** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+3\cos x)dx$

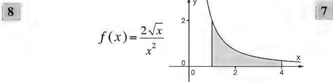
3 $\int_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$ **4** $\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left(1+|\sin x|\right)dx$

لە ڕاهێنانی 5 و 6 دا، وێنەی ئەو ناوچەیە بکێشە کە ڕووبەرەکەی دەکاتە تەواوکارییە سنووردراوەکە، پاشان ئەوەی لە یاساکانی هەژمارکردنی ڕووبەر لە ئەندازە دەیزانێت بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای تەواوکارییەکە.

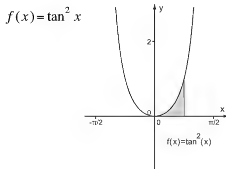
5 $\int_{-2}^{2} \left(1+|x|\right)dx$ **6** $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

لە ڕاهێنانی 7 و 8 دا، ڕووبەری ناوچە سێبەرکراوەکە هەژمار بکە.

7 $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2}$



8 $f(x)=\tan^2 x$



9 ئەگەر $\int_1^3 f(x)dx=5$ و $\int_1^5 f(x)dx=3$ بەهای ئەمانەی دێن بدۆزەوە.

أ $\int_1^3 \frac{x^2 f(x)-1}{x^2}dx$ ب $\int_3^5 \left(x+2f(x)\right)dx$

10 ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2}+2\sqrt{x}$ تەوەری x و هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$، $x=4$ بدۆزەوە.

11 ناوەندە بەهای نەخشەی $f(x)=3x^2+2x+1$ لە ماوەی $[1,\ 4]$ بدۆزەوە.

12 وادابنێ نەخشەی $M(x)=3x^2-36x+105$ تێچوونی پەراوێزی بە هەزاران دینار بۆ بەرهەمهێنانی x یەکە بۆ یەکێك لە بەرهەمەکان دەنوێنێت $(0\le x\le 8)$.

أ ئەو نەخشەیە بدۆزەوە کە تێچوونی گشتی $C(x)$ دەنوێنێت، ئەگەر زانیت تێچوونی نەگۆڕ دەکاتە لە 56000 دینار.

ب تێچوونی گشتی بەرهەمهێنانی 6 یەکە بدۆزەوە.

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــنان

وانە 3-5

هەژمارکردنی تەواوکاری

Integration Methods

لە ڕاهێنانی 1 تا 4، تەواوکاری داواکراو بدۆزەوە.

1 $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$

2 $\int_0^{\pi} x\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

3 $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3e}{2}} \ln\left(\frac{2x}{3}\right)dx$

4 $\int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx$

5 أ بۆ دۆزینەوەی $\int \ln x\,dx$ تەواوکاری بەشبەشکردن بەکاربهێنە.

ب نەخشەی بنەڕەتی نەخشەی $f(x)=\ln^2 x$ بدۆزەوە کە ڕوونکردنەوەکەی بە خاڵی $(1, 1)$دا دەڕوات.

6 تەواوکاری $\int x\sqrt{x+3}\,dx$ بدۆزەوە بەبەکارهێنانی:

أ لەجیاتی گۆڕاوەکە $u=x+3$ دابنێ.

ب تەواوکاری بە بەشبەشکردن لەگەڵ $dv=\sqrt{x+3}$.

لە ڕاهێنانی 7 و 8 دا، بەبەکارهێنانی تەواوکاری بە بەشبەشکردن زیاتر لە جارێك تەواوکاری داواکراو بدۆزەوە.

7 $\int \frac{x^2}{e^x}dx$

8 $\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

لە ڕاهێنانی 9 و 10، ڕووبەری سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی $f(x)$ و تەوەری x و دوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ بدۆزەوە.

9 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ ، $a=0$ ، $b=1$.

10 $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، $a=0$ ، $b=\ln 2$.

11 تەواوکاری $\int e^{\sqrt{x}}dx$ بدۆزەوە

12 $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$ $\quad I_0=\int_0^1 e^{1-x}d$ کاتێك n ژمارەیەکی ڕاستی سالیب نەبێت.

أ I_n بدۆزەوە کاتێك $n=0$ و $n=1$.

ب تەواوکاری بە بەشبەشکردن بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

ج بەهای I_3 دەرئەنجام بکە.

ناو ______ بەروار ______ پۆل ______

ڕاهێــــنان

وانە **4-5**

جێبەجێکردنی تەواوکاری Applications of Integral

لە ڕاهێنانی 1 تا 4، ڕووبەری ئەو ناوچەیە بدۆزەوە کە بە نەخشەی $f(x)$ و تەوەری x لەلایەک و هەردوو ڕاستەهێڵی $x=a$ و $x=b$ لەلایەکی تر سنووردراوە.

1 $f(x)=x^3-3x^2$ ، $a=0$ ، $b=3$

2 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ ، $a=\frac{1}{e}$ ، $b=e$

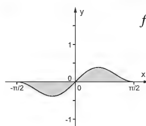
3 $f(x)=x\cos 2x$ ، $a=0$ ، $b=\frac{\pi}{2}$

4 $f(x)=e^x-e^{-x}$ ، $a=-\ln 2$ ، $b=\ln 2$

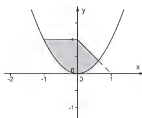
5 تەواوکاری بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری بازنەیەك، چەقەکەی $(0 , 0)$ و بە خاڵی $(4 , 3)$دا دەڕوات.

لە ڕاهێنانی 6 و 7 دا، ڕووبەری ناوچەی سێبەرکراو هەژماربکە.

6 $f(x)=\sin x\cos^2 x$



7 $f(x)=x^2$



8 $f(x)=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

أ تەواوکاری بە بەشبەشکردن بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی ڕووبەری سنووردراوی نێوان ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$ و تەوەری x و هەردوو دوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=e$.

ب قەبارەی ئەو تەنەی پەیدادەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی ناوچەی سنووردراوی لقی أ بە دەوری تەوەری x بدۆزەوە

لە ڕاهێنانی 9 و 10، قەبارەی ئەو تەنەی پەیدادەبێت لە ئەنجامی سوڕانەوەی ناوچەی سنووردارو بە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە بە دەوری تەوەری x بدۆزەوە.

9 $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$ ، $y=0$ ، $x=\ln 2$

10 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $y=1$ ، $x=2$

لە ڕاهێنانی 11 و 12، خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکە بدۆزەوە، پاشان ڕووبەری ئەو ناوچەیە بدۆزەوە کە سنووریان داوە.

11 $f(x)=xe^{-x}-e^{-x}$ ، $g(x)=x-1$

12 $f(x)=x^4-2x^2$ ، $g(x)=x^2$

13 وێنەی بەرامبەر ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەتی f ی نەخشەی $f(x)$ دەردەکەوێت

أ هەژماربکە $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

ب ئایا نەخشەی $f(x)$ لە ماوەی $]2 , 3[$ موجەبە یان سالبە؟

ج ڕووبەری ناوچەی سنووردراو بە ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)$، تەوەری x وهەردوو دوو ڕاستەهێڵی $x=0$ و $x=3$ هەژماربکە.

ناو ________ بەروار ________ پۆل ________

ڕاهێـــنان

وانە **1-6**

بڕگە قوچەکییەکان Conic Sections

تیشکۆ و سەرو دەلیل و تەوەری بڕگەی هاوتایەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەی بڕگە هاوتایەکە لە ڕووتەختی پۆوتانەکان بکێشە.

1 $x=-2y^2$ **2** $x^2+6x-8y+9=0$

هاوکێشەی بڕگە هاوتایەکە بدۆزەوە.

3 سەر $(0,-1)$ ، تیشکۆ $(0,-2)$ **4** سەر $(-3,1)$ ، دەلیل $x=-6$

چەق و هەردوو تیشکۆ و تەوەری گەورەو بچووکی بڕگە ناتەواوەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەی بڕگەکە بکێشە.

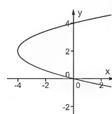
5 $x^2+9y^2=1$ **6** $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$

چەق و هەردوو تیشکۆ و تەوەری گەورەو بچووکی بڕگە زیادەکە بدۆزەوە، پاشان وێنەی بڕگەکە بکێشە.

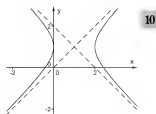
7 $4x^2-\frac{y^2}{4}=1$ **8** $y^2-4x^2+2y-8x-7=0$

هاوکێشەی بڕگە قوچەکییەکە بدۆزەوە.

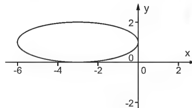
9

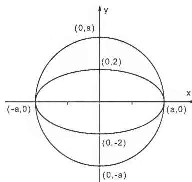


10



11





12 هاوکێشەی ئەو بڕگە ناتەواوە بدۆزەوە کە لە وێنەی بەرامبەر دەردەکەوێت، ئەگەر زانیت ڕووبەرەکەی نیوەی ڕووبەری بازنەکەیە لە هەمان وێنەدا.

13 لە ڕووتەختی پۆوتاندا، ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $x^2+4y|y|-16=0$ بکێشە.

14 هاوکێشەی ئەو بڕگە زیادە بدۆزەوە کە سەرەکانی دەکەونە سەر $(1,0)$ و $(-1,0)$ و دەرکەنارەکانی بریتین لە $y=3x$ و $y=-3x$.

15 هاوکێشەی ئەو بڕگە زیادە بدۆزەوە ئەگەر زانیت چەقەکەی $(0,0)$ و یەکێك لە سەرەکانی خاڵی $(0,2)$ و یەکێك لە تیشکۆیەکانی خاڵی $(0,4)$ بێت.

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــنان

وانە 2-6

پۆلێنکردنی بڕگە قوچەکییەکان Classifying Conics

1 جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواوی $4x^2 + 3y^2 = 12$ لەگەڵ دوو تیشکۆ و دوو دەلیلەکەی بدۆزەوە.

2 هاوکێشەی بڕگە ناتەواوێك بدۆزەوە چەقەکەی $(2, 1)$ و تیشکۆیەکەی $(4, 1)$ و دەلیلەکەی $x = 6$ بێت.

3 هاوکێشەی بڕگە ناتەواوێك بدۆزەوە چەقەکەی $(0, 0)$ و تیشکۆیەکەی $(2, 0)$ و سەرەکەی $(3, 0)$ بێت.

4 پۆوتانی سەرەکانی بڕگە ناتەواوێك بدۆزەوە کە جیاوازی چەقەکەی $\frac{2}{3}$ تیشکۆکانی $(0, \pm 3)$ بێت.

5 جیاوازی چەقی بڕگەی زیادی $x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ لەگەڵ دوو تیشکۆ و دوو دەلیلەکەی بدۆزەوە.

لە ڕاهێنانی 6 و 7 دا، هاوکێشەی بڕگە زیاد بە زانینی پێکهێنەرەکانی کە دراوە بدۆزەوە.

6 جیاوازی چەقی: 2 ، سەرەکان $(\pm 2, 0)$

7 جیاوازی چەقی: 3 ، تیشکۆیەکان $(0, 0)$ و $(0, 4)$.

8 جیاوازی چەقی بڕگە زیادی $x^2 - y^2 = a^2$ کاتێك $(a \neq 0)$ بدۆزەوەو هەردوو تیشکۆ و دەلیل و دەرکەنارەکانی بدۆزەوە.

9 جیاوازی چەقی بڕگە زیادێك بدۆزەوە کە سەرەکانی $(\pm 2, 0)$ بێت و بە خاڵی $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ دا دەڕوات.

10 جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواوێك بدۆزەوە کە کۆمەڵەی هەموو ئەو خاڵانە پێکدەهێنن لە ڕووتەختێکدا، کە سەرجەمی دوو دووریان لە دوو خاڵی $(1, 0)$ و $(4, 0)$ بەهایەکی نەگۆڕە دەکاتە 6 .

11 جیاوازی چەقی خولگەی هەسارەی مەریخ بە نزیکی دەکاتە 0.09، ڕێژەی درێژی ئەو خولگە بۆ پانییەکەی بدۆزەوە.

12 ڕوونیبکەوە، هاوکێشەی بڕگەی ناتەواو بەم شێوەیە دەنووسرێت:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2\left(1-e^2\right)} = 1$$ کە e دەکاتە جیاوازی چەقی بڕگەی ناتەواوەکە.

13 ڕاهێنانی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە کە ئامانجی بڕگەی ناتەواو بریتییە لە بازنە، کاتێك e نزیکدەبێتەوە لە 0 .

ناو ______________ بەروار ______________ پۆل ______________

ڕاهێـــنان

وانە 3-6

هاوکێشە دووجایەکان بە دوو گۆڕاو Quadratic Equations in 2 Variables

تاقیکردنەوەی جیاکەرەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی جۆری ئەو چەماوەی کە هاوکێشەکە دەنوێنێت.

1 $x^2+xy+y^2+x+y+1=0$

2 $4x^2+y^2-4xy-4x-10$

3 $x^2-4xy+4y^2+4-3=0$

4 $x^2-3xy-4y^2=0$

دوو تەوەری پۆتانەکانی بسوڕێنەوە بۆ ئەوەی لە ڕادەی یەکتربڕین ڕزگاربێت، پاشان جۆری نواندنی ڕوونکردنەوەی هاوکێشەکە دیاریبکە.

5 $2x^2+xy+2y^2-15=0$

6 $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+4=0$

7 $x^2-3xy+y^2=5$

8 $xy+y+1=x$

9 ساین و کۆساینی ئەو گۆشەییەی تەوەری پۆتانەکان پێی دەسوڕێنەوە بدۆزەوە بۆ ئەوەی لە ڕادەی یەکتر بڕینی هاوکێشەی $4x^2-4xy+y^2-8\sqrt{5}x-16\sqrt{5}y=0$ ڕزگاربیت (بەبێ بەکارهێنانی سوڕانەوە).

10 کاریگەری سوڕانی تەوەری پۆتانەکان بە 90° بە دەوری خاڵی بنەڕەت لە هاوکێشەی هەر بڕگەیەکی قووچەکی چییە؟ هاوکێشەی بڕگەکە لە ڕووتەختی پۆتانە نوێیەکە بدۆزەوە.

أ بڕگەی ناتەواو: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ب بڕگەی زیاد: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ج بڕگەی هاوتا: $y^2=4px$

11 جیاوازی چەقی بڕگەی زیادی $xy=4$ بدۆزەوە.

12 بە فەرامۆشکردنی بارەکانی لەباربردن، بەهاکانی ژمارەی ڕاستی m بدۆزەوە. کەوا لە هاوکێشەی $x^2+mxy+my^2-y-1=0$ دەکات ببێتە:

أ بڕگەی ناتەواو.

ب بڕگەی زیاد.

ج بڕگەی هاوتا.

13 أ جۆری ئەو چەماوە کە هاوکێشەی $xy-x^2-x-1=0$ دەنوێنێت چییە؟

ب بۆ کێشانی ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەکە نەخشە ڕێژەییەکان بەکاربهێنە.

ناو ______ بەروار ______ پۆل ______

ڕاهێـــنان

وانە **1-7**

شێوە جیاوازەکانی ژمارەی ئاوێتە Various Forms of a Complex Number

1 ئەم ژمارە ئاوێتانەی دێن بە شێوەی جەبری بنووسە:

أ $(1-2i)^3$ ب $\frac{(2-i)(2+i)}{1+i}$ ج $1+i+i^2+i^3+.....+i^{20}$

2 ئەم ژمارە ئاوێتانەی دێن بە شێوەی سێگۆشەی و جەمسەری بنووسە:

أ $z_1=-1+i\sqrt{3}$ ب $z_2=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ ج $z_3=\overline{z}_1\times z_2^3$

3 شێوەی جەمسەری ژمارەی ئاوێتەی z ئەمەیە $z=4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

أ شێوەی جەمسەری بۆ هەریەکە لەم ژمارە ئاوێتانە $z_1=\frac{1}{\overline{z}^2}$ و $z_2=z+iz$ بدۆزەوە.

ب بەهای هەریەکە لە $\left|iz^2\right|$ و $\left|\frac{1+2i}{iz}\right|$ بدۆزەوە.

ج بەهای هەریەکە لە $\arg(-5z)$ و $\arg\left(\frac{-2i}{\overline{z}^5}\right)$ بدۆزەوە.

د بەهاکانی ژمارەی سرووشتی n بدۆزەوە کە z^n ژمارەیەکی ڕاستی ناسالب نەبێت.

4 شێوەی جەمسەری بۆ ژمارەی ئاوێتەی $z=\sin(2\theta)-i\cos(2\theta)$ بنووسە.

5 أ بەشێوەی جەبری ژمارەی ئاوێتەی z^2 بنووسە کاتێك $z=\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\sqrt{3}\right)$

ب بەهای ڕووتی ژمارەی ئاوێتە z و گۆشە جەمسەریەکەی بدۆزەوە.

ج بەهای ڕێك بۆ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ بدۆزەوە.

6 بیسەلمێنە کە $\left|\frac{iz+1}{z+i}\right|=1$ کاتێك $z\neq i$.

7 M و N و P سێ خاڵی جیاوازن $z_M=2e^{i\theta}$، $z_N=\overline{z}_M$، $z_P=2e^{3i\theta}$ بیسەلمێنە کە $MN=MP$.

8 شێوەی جەمسەری ئەم ژمارە ئاوێتانەی دێن بدۆزەوە:

أ $z=\left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}$ ب $z=\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{20}$

9 شێوەی جەمسەری ئەم ژمارەیە $z=\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)^{10}$ بنووسە.

10 أ بە شێوەی جەمسەری، ڕەگەکانی 1 لە پلە 5 بنووسە.

ب سەرجەمی ئەو ڕەگانە چەندن؟

11 بە شێوەی جەبری ژمارە ئاوێتەی z کە دوو مەرجی: $|z-1|=\sqrt{5}$ و $\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ جێبەجێ دەکات بدۆزەوە.

12 بیسەلمێنە کە $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

ناو ________ بەروار ________ پۆل ________

ڕاهێـــــنان

وانە 2-7

ژمارە ئاوێتەکان و ئەندازە

Complex Numbers and Geometry

لە ڕاهێنانی 1 تا 4، ژمارەی ئاوێتە بۆ شێوەی خاڵی m بە جێگۆڕکێ دیاریکراو بنووسە.

1 $M(3, 4)$، ڕاکێشانی ئاڕاستەبڕەکەی $\vec{u}(-2, 1)$.

2 $M\left(1, 2-\sqrt{3}\right)$ وێنەدانەوە بە دەوری تەوەرەی x .

3 $M\left(\sqrt{2}, -1\right)$، بە هاوڕێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و ڕێژەکەی $\sqrt{2}$.

4 $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، سوڕانەوە بە دەوری خاڵی بنەڕەت گۆشەکەی $\frac{\pi}{6}$.

5 M خاڵی ژمارەی ئاوێتەی z ـە کاتێك $z \neq \pm 1$ و $z \neq \pm i$ کۆمەڵەی خاڵەکانی M بدۆزەوە بۆ ئەوەی هەردوو ڕاستەهێڵی PQ و PR ئەستوون بن، ئەگەر زانیت $z_P = 1$، $z_Q = z^2$، $z_R = z^4$.

6 A، B، P، D چوار خاڵن لە ڕووتەختی پۆتاندا کاتێك $z_A = 2$، $z_B = i$، $z_c = 3i$، $z_D = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}i$.

أ بیسەلمێنە کە $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = 2k\pi$ لە بارەی هەردوو ڕاستەهێڵی AB و CD چ دەرئەنجامێکت دەبێت؟

ب $\left|z_B - z_C\right|$ و $\left|z_A - z_D\right|$ بدۆزەوە.

ج جۆری چوارلای $ADCB$ چییە؟

7 بسەلمێنە سێگۆشەی PQR سێگۆشەیەکی ڕێکە، کاتێك $z_P = -2$، $z_Q = 1 + i\sqrt{3}$، $z_R = 1 - i\sqrt{3}$.